1037. D'Amore, B. (2022). Riflessioni su alcune problematiche relative al processo di insegnamento – apprendimento: dagli "errori" degli studenti alle convinzioni dei docenti.
Annali online della Didattica e della formazione docente. Università di Ferrara, *14*(24), 6-25. https://annali.unife.it/adfd/issue/view/308

Riflessioni su alcune problematiche relative al processo di insegnamento – apprendimento: dagli "errori" degli studenti alle convinzioni dei docenti

Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
NRD, Università di Bologna

Sunto. In questo testo proponiamo un'analisi di alcuni errori tipici degli studenti offrendo un tentativo elementare di giustificazione di essi, basandoci su atteggiamenti degli insegnanti. Lo scopo è quello di proporre una riflessione critica sul processo di insegnamento – apprendimento.

Parole chiave: errore, processo di insegnamento – apprendimento, interpretazione da parte dello studente, linguaggio specifico della matematica.

Abstract. In this text we propose an analysis of some typical student errors and offer an elementary attempt to justify them, based on certain teacher attitudes. The aim is to propose a critical reflection on the teaching-learning process.

Keywords: error, teaching-learning process, student interpretation, specific language of mathematics.

Il proliferare di tante e spesso diverse teorie [pur nelle similitudini non sempre evidenti (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020)] nel campo della didattica della matematica porta noi ricercatori talvolta a … dimenticare o a dare per scontato quel che di concreto si avverte nelle aule delle scuole di tutto il mondo, quel che costituisce la vera, reale, tangibile preoccupazione del docente professionista. Questa riflessione ci è stata proposta con gentilezza e concretezza durante un seminario a tenere il quale eravamo stati invitati; ci era stato chiesto di presentare in termini comprensibili le più recenti teorie in didattica della matematica.
Ora, beninteso, non rientra nelle nostre incombenze quel che a volte sembra essere atteso in corsi per docenti: "insegnare a insegnare"; nessun ricercatore serio, scienziato, può essere così ingenuo da pensare che sia questo lo scopo del proprio lavoro. [Anche se esistono da anni persone che creano e diffondono "metodi per l'insegnamento efficace e di sicuro successo", ma si stratta sempre di personaggi ben lungi da una seria ricerca scientifica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016)].
Tuttavia, la manifestazione di sconforto dei colleghi docenti di scuola non può non essere ascoltata e presa in seria considerazione. Pur restando loro i protagonisti professionali della docenza scolare, riteniamo che la nostra assidua presenza nelle aule e il nostro profondo lavoro nella ricerca possono aiutare, collaborare a capire le problematiche del sottile e complesso passaggio fra insegnamento e apprendimento, anche in modo concreto.
Alla nostra richiesta a questi docenti di spiegare bene quale fosse il problema avvertito, la risposta ci è stata proposta in molte modalità diverse, ma riteniamo si possa riassumere così (con parole prese da uno degli intervenuti): «Noi insegniamo, ce la mettiamo tutta a insegnare bene, in modo corretto ed efficace. I ragazzi sembra che abbiano capito, appreso; ma poi fanno degli errori che ti lasciano sconcertato».

Bellissima, semplice ma efficace descrizione del problema reale.
Inutile ora mettersi a disquisire sulla teoria delle situazioni (TdS) di Guy Brousseau (Brousseau, 1980, 1986, 2008; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020) e in particolare sul problema degli ostacoli ontogenetici, didattici ed epistemologici (D'Amore, 1999). È bene riflettere, invece, ancora una volta su che cosa siano gli errori, come si creano, come si manifestano e come si possono correggere o, meglio, prevenire.
Abbiamo potuto verificare che non tutti i ricercatori che attualmente si dedicano alla didattica della matematica, assorti come sono da problemi teorici relativi alle diverse e più diffuse teorie di didattica della matematica (TdS, semiotica duvaliana, EOS, TO, solo per citarne alcune …) sanno che, al momento della nascita di quella che oggi chiamiamo "didattica della matematica", mentre si consolidava la ricerca dettata dalla teoria delle situazioni, si avviavano anche altre tipologie di ricerche che avevano fortuna in diverse parti del mondo. Una di queste, preliminare a molte altre, era proprio legata allo studio concreto degli errori degli studenti, alle cause di questi errori, alle eventuali proposte didattiche del docente che potevano averli originati, ai rimendi da proporre. Molti di questi studiosi si dichiaravano avversari delle "teorie" (in primis della TdS) perché, a loro avviso, non erano proposte "concrete" ma, appunto, solo "teoriche". A scanso di equivoci, noi siamo convinti partitari del modo di pensare espresso dal seguente aforisma popolare: *Non c'è nulla di più concreto che una buona teoria*.
Una bibliografia su questo tipo di studi e su questa posizione sarebbe sterminata; ci limitiamo a proporre solo i seguenti testi (Charnay, 1989; Rico, 1995; Economou, 1995; Gagatsis & Christou, 1997; Gagatsis & Kyriakides, 2000; Brousseau, 2001; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Ramírez Bernal, 2013).
Ma avvertiamo che lo studio teorico della relazione fra insegnamento del docente ed errori degli studenti fa parte ancora oggi delle ricerche, grazie ad aspetti profondi di studi relativamente recenti. Per esempio la teoria delle misconcezioni (D'Amore, 1999; D'Amore & Sbaragli, 2005), l'analisi delle convinzioni e concezioni dei docenti (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2004), della semiotica duvaliana (D'Amore, 2000a, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013; Duval, 2017; D'Amore & Duval, 2019) ecc.
Segnaliamo a mo' di esempio i risultati scientifici di due tesi dottorali di questi ultimi anni.
Un primo lavoro riguarda la difficoltà dei docenti di scuola secondaria di accettare, pur di fronte alla realtà concreta, dimostrata da filmati e interviste rivolte ai loro studenti in assenza dei docenti, che le interpretazioni delle rappresentazioni semiotiche proposte dal docente stesso fossero interpretate dagli studenti in modo del tutto diverso da quello che aveva ipotizzato il docente. L'esempio più clamoroso riguarda la rappresentazione grafica su base insiemistica degli insiemi numerici N, Z, Q, R e I (così veniva chiamato l'insieme dei numeri irrazionali) (Becerra Galindo & Font, 2019; Becerra Galindo, 2020, 2021, 2022). Solo dopo che il ricercatore aveva mostrato al docente tale discrepanza, questi si rendeva conto che la differenza di interpretazione dei suoi grafici era non solo possibile ma manifesta e si dichiarava pronto a ripensare daccapo la forma di farvi ricorso (ciò che l'autore della ricerca ha chiamato "coscienza semiotica").
Un secondo lavoro dottorale è relativo a discussioni fra docenti di fine scuola secondaria di II grado e universitari del primo biennio (di materie nelle quali la matematica è presente come disciplina di servizio); essi condividono esempi di errori commessi dai propri studenti. Dopo tentativi abbastanza banali di dare spiegazione di questi errori (attribuiti a ignoranza, disinteresse, scarse capacità logiche, …) viene proposto ai docenti stessi un beve seminario sulle misconcezioni e su alcune teorie di didattica della matematica. Il cambio di convinzioni degli insegnanti è totale e immediato, rivelando una decisa capacità professionale e una profonda disponibilità culturale; la discussione fra loro si fa subito assai più profonda, specifica e soprattutto concreta (Ramírez Bernal, 2017, 2020).

Segnaliamo inoltre un interessante lavoro sulla "semiotica dei puntini", come la chiamano gli autori (Bagni & Negrini, 2000). Vediamo di che si tratta.

Quando il docente (di qualsiasi livello scolastico) scrive alla lavagna qualcosa come N = {0, 1, 2, 3, …} o $\pi = 3{,}141592\ldots$ o $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ o 10/3 = 3,333…, con quei tre puntini sospensivi sta indicando situazioni assai diverse tra loro, delle quali egli è perfettamente cosciente, ma con un simbolismo identico. Nella sua convinzione culturale profonda e certo corretta, il docente sa bene come devono (dovrebbero) essere interpretati in ciascun caso quei puntini. Ma i due autori rivelarono ben altro nella loro ricerca empirica! Gli studenti erano convinti che i tre puntini rappresentassero possibili prosecuzioni di successioni numeriche con caratteristiche facilmente immaginabili; per esempio, dopo 1,4142 qualcuno sospettava dovesse apparire 43444546… e così via.
D'altro canto, chi qui scrive ama ricordare la dichiarazione di uno studente di V secondaria di II grado, M., il quale affermò con totale convinzione che, in quella rappresentazione di N, dopo il 3, i tre puntini indicano i numeri naturali: 4, 5, 6, 7, 8 e 9, mostrando di aver sempre creduto, in tutto il suo percorso scolastico di 13 anni, che i numeri naturali sono quelli che si scrivono con una sola cifra (talvolta includendo 0 e talaltra no).

Stando tutto quanto sopra, abbiamo deciso di dedicare il breve presente testo alla presentazione e al commento di errori assai diffusi a tutti i livelli scolastici; confermiamo che l'analisi della relazione fra quanto dichiara a lezione il docente (in modo certamente corretto ma in modo tale che possa essere interpretato dagli studenti in senso diverso da quanto da lui auspicato) e l'interpretazione dell'allievo può/deve/è bene che sia analizzata all'interno di un'apposita, opportuna teoria, visto che è possibile e utile farlo, e che questa analisi risulta vincente, opportuna, comoda, utile. Ma anche per andare incontro alle esigenze di concretezza manifestate così chiaramente e così professionalmente dai docenti alla fine di quel seminario ricordato all'inizio di questo scritto.
Gli esempi che potremmo mostrare, raccolti in oltre 50 anni di militanza nel mondo della didattica della matematica, sono moltissimi; noi ne presenteremo qui di seguito solo alcuni, relativi a tematiche diverse e a livelli scolastici diversi. Essi verranno tratti dai risultati da alcune prove Invalsi e soprattutto da esempi concretamente vissuti durante le sedute di "osservazione passiva" nelle aule, una delle forme di analisi più efficaci, significative e convincenti che abbiamo sperimentato nei decenni.

Rileviamo esplicitamente che le possibili cause degli errori degli studenti sono molteplici e imputabili alle più diverse motivazioni, non sempre facili da evidenziare e circostanziare.
Potrebbe apparire che tali cause siano ascrivibili a fatalità o a banale mancanza di comprensione, a distrazione, a ignoranza da parte dello studente, …, il che certo a volte è vero. A monte di ciò si pongono solitamente molte e diverse accuse, ascrivibili allo studente. Qualche autore pone in evidenza anche le responsabilità dei docenti, ma su questo punto alcune posizioni sono troppo leggere. Noi abbiamo sempre avuto la precisa sensazione che, indipendentemente dalla formazione professionale e specifica dei docenti, spesso di grado assai elevato e di indubbia qualità, e indipendentemente dalle modalità didattiche adottate, l'errore sia come ineliminabile, intrinseco, nella relazione molteplice che si rifà al triangolo della didattica. Esiste e si manifesta in mille maniere, nonostante la correttezza, la precisione, la professionalità del docente. Dunque è parte del prodotto d'aula, non ci sono indicatori prevedibili o cause specifiche, spesso (talvolta sì, ma spesso no). La posizione del docente sensibile, esperto, qualificato e capace si manifesta spesso proprio nella capacità di analisi delle cause e della qualità degli errori dei propri studenti.
In quanto ai possibili rimedi, più volte in questo testo si auspica la necessità di una conoscenza sempre più sofisticata e professionale della didattica della matematica da parte dei docenti; non è solo un modo di dire vago e generico, è specifico; e i riferimenti a casi qui esposti in dettaglio di analisi di errori e di possibili cause di questi, lo pone in evidenza. Il nostro continuo invito alla preparazione in didattica della matematica, dunque, non è generico, ma è assai specifico e reso concreto dagli esempi proposti e dai nostri commenti ai singoli casi.

Scrittura posizionale dei numeri naturali.

Su questo tema sono stati proposti moltissimi quesiti nelle prove Invalsi, specie nelle scuole primarie, con risultati nazionali assai più che negativi.
A una domanda del tipo: «Quante decine ci sono nel numerale 642», la risposta assai più frequente è 4, considerata corretta da parecchi docenti.
Nel nostro attuale sistema di scrittura dei numeri, posizionale e decimale, la scrittura 642 indica 6 centinaia, 64 decine, 642 unità; ma allo studente è stata posta enfasi sulla forma formale di scrittura, non sul significato: nella "scrittura 642" il posto delle centinaia è occupato dalla cifra 6, il posto delle decine è occupato dalla cifra 4, il posto delle unità è occupato dalla cifra 2.
Lo studente ha frainteso tutto ciò, oppure gli è stato proposto in modo confuso. Fatto sta che questo è uno degli errori più ricorrenti (non solo nella scuola primaria).
Il ricorso concreto abbastanza diffuso all'abaco non aiuta certo; in questo strumento le asticelle verticali nelle quali si infilano i gettoni numerici sono proprio chiamate così: asticella delle centinaia, delle decine, delle unità. Alla domanda: «Quanti gettoni ci sono sull'abaco nella rappresentazione del numerale 642?», la risposta corretta è: «6 – 4 – 2», ma crea confusione generando l'errore interpretativo: ci sono 6 centinaia, 4 decine e 2 unità.
Qualcuno, per rinforzare questa confusione e facilitare l'errore, ha pensato di introdurre colori appositi: le unità sarebbero verdi, le decine rosse, le centinaia blu (tali colori sono inventati da noi, non ricordiamo quali fossero quelli originali), rinforzando la convinzione totalmente sbagliata detta sopra. Il nostro sistema è *posizionale*, non *cromatico*; "posizionale" vuol dire che il valore di una cifra all'interno di un numerale dipende dal posto che occupa, non dal colore nel quale è scritto o dal tono di voce nel quale è pronunciato... Nel numerale 642, il 2 è nel posto delle unità (il primo partendo da destra) e vale "2 unità"; il 4 è nel posto delle decine e vale "40 unità", il 6 è nel posto delle centinaia e vale "600 unità".

A questo proposito, facciamo solo notare che la matematica ha un linguaggio specifico molto stretto e significativo che vale la pena apprendere; su questo tema segnaliamo gli eccellenti lavori di Colette Laborde, che ha dato il via (Laborde, 1982, 1995) a studi sempre più profondi dai quali poi si sono evoluti quelli più specificamente legati alla lingua italiana (D'Amore, 1987, 1993a, 2000b) e a tematiche connesse con la matematica e la sua didattica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012; D'Amore & Santi, 2018).
Numero, numerale, cifra, valore, … sono parole tra loro semanticamente diverse, ciascuna delle quali ha un suo proprio significato specifico. A scuola spesso queste parole non si usano, non tutte, creando confusione. O si usano a sproposito, confondendole tra loro.
Nel corso dei decenni, grazie alle parecchie ore trascorse in "osservazione passiva" nelle aule, grazie alla gentile disponibilità di parecchi docenti veri professionisti, abbiamo potuto verificare che vale la pena spendere un po' di tempo a spiegare tutto ciò, anche se poi si può – si deve essere indulgenti nell'uso della terminologia corretta e completa da parte degli studenti, non diventando ossessivi. È importante, a nostro avviso, che il docente ne faccia uso, come fossero tutte parole usuali, normali, da introdurre nel vocabolario scolastico. Attenzione rivolta a questo genere di questioni nettamente giova.

A proposito di terminologia corretta, sono diffusi nel mondo della scuola termini il cui significato risulta ambiguo o scorretto, il che non giova all'apprendimento significativo e consapevole degli studenti.
Ci limitiamo di seguito a una sorta di breve elenco

Altezza di un triangolo.
Dato un triangolo ABC, si chiama "altezza di ABC rispetto al vertice A …" (questo è il definiens); in quanto al definiendum, talvolta viene proposto, al posto dei puntini la frase: "… la retta che passa da/per A ed è perpendicolare alla retta BC"; in altre occasioni: "… la semiretta di origine A perpendicolare alla retta BC"; in altre: "… il segmento che ha come vertici A e il punto di intersezione

fra la retta perpendicolare a BC che passa per A e la retta BC”; in altre: “… la distanza fra A e la retta BC”; e ci sono molte altre proposte che circolano, riscontrabili anche sui libri di testo.
Il docente deve scegliere personalmente che cosa vuole che sia tale oggetto matematico, scegliere la definizione che gli sembra più opportuna o corretta e proporre quella ai propri studenti, senza ambiguità.
Si noti che, in certe occasioni, tale altezza è una retta, in altre una semiretta, in altre un segmento, in altre un numero (quello che esprime la misura di un determinato segmento).
Georg Cantor forse per primo, ma tanti altri matematici moderni e contemporanei hanno riconosciuto e posto in evidenza la “libertà della matematica”: «L’essenza della matematica risiede nella sua libertà», che noi potremmo anche interpretare come segue: in casi come quello descritto in queste ultime righe, il docente ha sì la libertà di compiere una sua scelta personale; ma poi, una volta compiuta questa scelta, deve essere coerente: non può introdurre l’altezza di un triangolo come un segmento e poi affermare che «per trovare l’area di tale triangolo bisogna moltiplicare base (e qui ci sarebbe un discorso analogo, altrettanto lungo, da fare) per altezza», perché quel che si moltiplica tra loro devono essere numeri che esprimono misure e non segmenti.
In matematica, la coerenza è fondamentale; d’altra parte, la matematica non è la scienza della verità, è la scienza della coerenza.

Esempio analogo riguarda molti altri oggetti della matematica, per esempio zero: si tratta di un numero naturale ($0 \in N$) o no ($0 \notin N$)? In tale secondo caso, secondo alcuni matematici e secondo molti docenti e autori di libri di testo, bisogna aspettare l’introduzione dei numeri interi Z ($0 \notin N$, ma $0 \in Z$). Bene: totale libertà! Ma abbiamo sentito proporre, in aule nelle quali 0 non era ammesso fra i naturali, esercizi nei quali un bambino aveva 5 palline e le perdeva tutte e 5, e chiedere quante palline gli restassero, accettando come risposta formale: 5-5=0. Il che non è precisamente coerente … Se si sente l’esigenza di 0 nei naturali, mettiamocelo e basta.
Sempre a proposito di zero, ricordiamo a chi ama introdurre elementi di algebra nella scuola primaria, che la sottrazione in N non ha elemento neutro, cioè: 0 non è elemento neutro della sottrazione in N, come abbiamo sentito pretendere che i bambini dicessero (avendo capito, poi, chissà cosa). Il fatto che a-0=a (con vari esempi concreti per a, per esempio 5) non è sufficiente per affermare che 0 è elemento neutro della sottrazione; dovrebbe essere anche 0-5=0 il che non è; perché la sottrazione $a-b$ in N si può ammettere solo se $a \geq b$.
In ogni caso, queste dizioni sofisticate potrebbero essere evitate nella scuola primaria, ma anche molto oltre: non ci sembrano idonee.

Perimetro di un poligono.
Il perimetro di un poligono non è un insieme di lati, è un numero, quello che esprime la lunghezza del suo contorno, cioè la somma delle misure di tutti i lati che costituiscono la spezzata chiusa semplice (cioè non intrecciata) che lo determina.
Ma molto spesso si sente utilizzare e si legge la parola “perimetro” come sinonimo di contorno o di frontiera.

Area di una figura piana e altro.
L’area di una figura piana è un numero, quello che esprime la misura della sua superficie. Ma molto spesso si sente utilizzare la parola “area” come sinonimo di superficie.
Si legge e si sente dire che «l’area di un rettangolo si trova “facendo” base per altezza» (spesso formalizzando: $b \times h$). Se base e altezza sono stati introdotti come numeri, cioè misure di segmenti opportunamente scelti, va anche bene. Ma se base e altezza sono segmenti, allora le cose non vanno bene, perché, come già detto poco sopra, si possono moltiplicare tra loro numeri, cioè misure in questo caso, e non segmenti. Moltiplicare tra loro segmenti non ha senso.

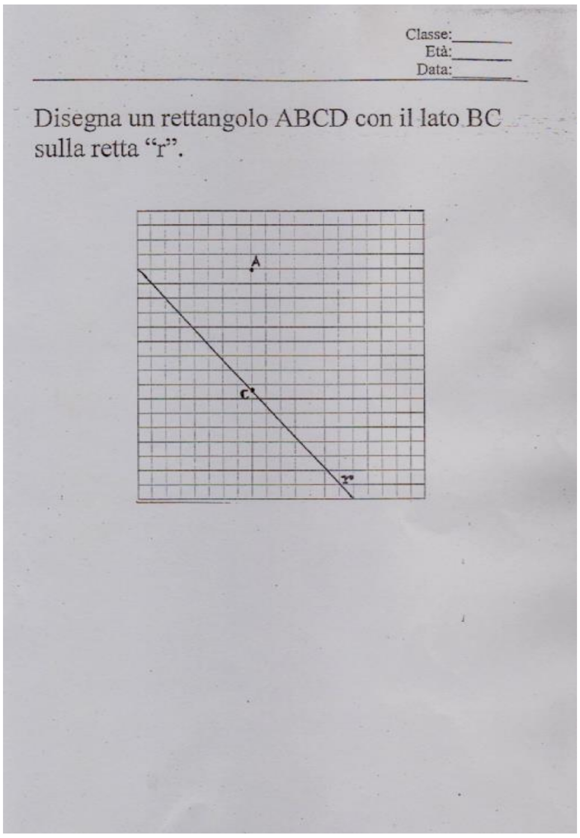
Lo stesso vale per la misura dell'area di un cerchio: si legge «l'area del cerchio si trova facendo raggio per raggio per π». Ma il raggio è un segmento, non una misura. (Restando in questo ambito, molti confondono circonferenza con cerchio: la prima è una linea, il secondo una superficie).
Anche per ciò che riguarda il perimetro, abbiamo più volte sentito dire e letto che: «il perimetro di un poligono si trova facendo lato più lato più lato …». Non ripetiamo quanto già fatto osservare sopra.

Enunciato del teorema di Pitagora.
Eccone uno tratto da un testo: «In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa (cioè: il cui lato è l'ipotenusa) è uguale alla somma dei due quadrati costruiti sui cateti».
Ma: che cosa significa che "un quadrato è *la somma* di due quadrati"? Che cosa significa qui "somma"? Se accostiamo tra loro due quadrati, non si ottiene in alcun modo un quadrato. Quel che riguarda l'aggettivo "uguale" ha a che fare con l'area non con le figure. Cioè: non si addizionano le figure (i quadrati) si addizionalo le misure delle loro aree.
Si potrebbe allora proporre, per esempio, il seguente enunciato: «In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti», o cose analoghe, in modo tale che la somma sia tra aree, cioè tra numeri, e non tra figure geometriche.

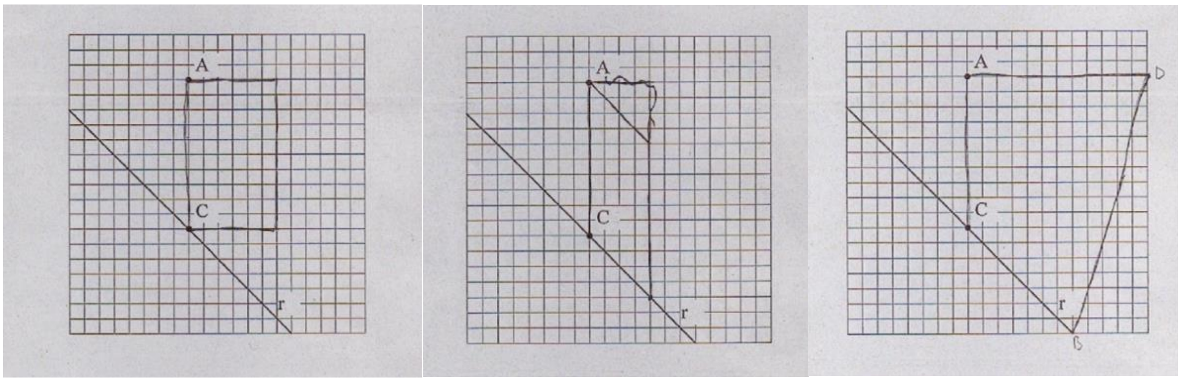
Risolvere una operazione.
Richiesta letta e sentita oralmente: «Risolvere la seguente operazione».
Si risolve un problema, un'equazione, non un'operazione. Un'operazione si effettua, si esegue, si fa.

La nostra posizione relativa al linguaggio matematico discorsivo (non parliamo di altre formulazioni semiotiche, se non quella del linguaggio discorsivo, di gran lunga la più usata nelle aule) potrebbe essere fraintesa, dunque è meglio se la chiariamo in maniera esplicita.
Che il docente debba far uso di terminologia adeguata lo diamo per scontato e necessario; che diventi assillante per lo studente far uso della stessa lo riteniamo né utile né confacente. A nostro avviso lo studente deve solo avvertire che la matematica ha un suo linguaggio specifico, coerente, elegante e significativo, così come lo percepisce e apprende anche nelle altre discipline: in storia, in geografia, in lettere, … Che poi si senta obbligato a farne un uso pressante e pesante, no. L'insegnante neanche lo correggerà in maniera continua e pedante, semplicemente lo farà notare.
Per esempio, in geometria si usa dire che due segmenti sono "sovrapponibili" o "congruenti" per dire che "hanno la stessa lunghezza". Le tre accezioni sono equisignificanti. Ma spesso si dice semplicemente che i due segmenti sono "uguali", senza troppa enfasi. Non lo troviamo affatto sconveniente, basta aver capito perfettamente che cosa significa quell' "uguale".
In geometria termini come verticale, orizzontale, in alto, in basso, prima, dopo, non hanno senso se si riferiscono a fatti prettamente teorici, ma ce l'hanno se fanno riferimento non a oggetti geometrici astratti ma a una loro descrizione visiva (un disegno a penna, a matita, con il gesso, o realizzato con i pixel su uno schermo, …).
Un segmento non può essere verticale dato che va pensato collocato in un piano; la frase "segmento verticale" non ha senso in geometria, dato che il piano è illimitato e dunque non ha bordi. Ma una rappresentazione di quel segmento, rappresentazione che non è un segmento (astratto), ma qualcosa di concreto: una lunga e sottile macchia di inchiostro o di mina o una successione di pixel, quella sì che può essere parallela al lato del sostegno sul quale è disegnato o rappresentato; se per esempio il disegno è parallelo al bordo destro del sostegno, sarà verticale; analogo discorso per orizzontale.
Sono tutte questioni che lo studente capisce benissimo, a qualsiasi età, e che lo rendono implicitamente padrone dell'epistemologia di quel che sta apprendendo, senza che tutto ciò sia reso eccessivamente e formalmente esplicito. (Tanto più la parola "epistemologia"!).
Si eliminano così i tanto ricorrenti errori relativi alle rappresentazioni. Tra i più famosi quelli relativi al disegno di un quadrato i cui lati (lati del disegno) non sono paralleli ai bordi del sostegno su cui è rappresentato. Molti studenti, perfino alcuni docenti (semmai non di matematica) e molte persone

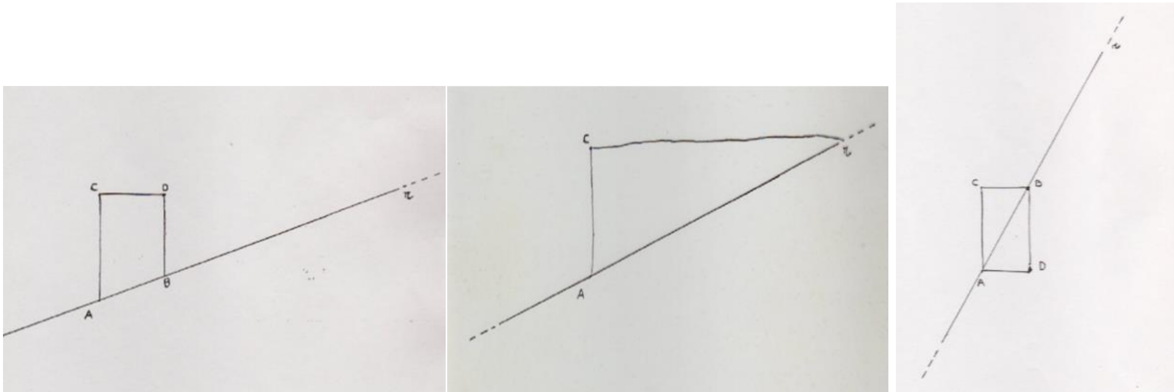
anche colte in altri campi non accettano che un quadrato possa essere rappresentato da un disegno i cui lati non sono paralleli ai bordi, come se a definire un quadrato concorressero queste componenti. Perfino alcune case editrici ben note si rifiutano di proporre disegni di quadrati “storti”, come li hanno denominati parlandone con noi, per non confondere bambini e insegnanti.
Per verificare che quanto stiamo dicendo corrisponde a verità, facciamo riferimento alla seguente prova empirica che si può effettuare a mo’ di test in qualsiasi aula, dalla scuola secondaria in poi, perfino all’università [in quei corsi nei quali non si studia matematica in sé, ma nei quali la matetica è supporto o strumento per altre discipline (per esempio nei corsi di Formazione primaria o Economia)].



Si tratta di un test preso a prestito da studi sui modelli di Elisa Gallo e suoi collaboratori (Gallo, 1992a, b; Gallo & Testa, 1991); e da noi provato più volte in aula e commentato in diverse occasioni (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2021).
Ben pochi allievi danno la risposta sperata dall’adulto competente; le varianti delle risposte fornite sono parecchie; qui ci limitiamo a pochi esempi.



Molti insegnanti, sorpresi dai risultati, hanno provato a proporre altre situazioni iniziali introducendo alcune varianti, per esempio facendo lavorare gli allievi su fogli non quadrettati, con la rappresentazione della retta *r* inclinata nel foglio in vari modi diversi. Ma la situazione non è migliorata affatto.



Non si tratta, banalmente e semplicemente, di "errori" ma di modelli mal concepiti fin dalla scuola primaria e mai accuratamente analizzati criticamente.
Alla base di tutto ciò ci sono incomprensioni relative alle proposte del docente, che supponiamo essere state corrette, ma stravolte dalle immagini stereotipate senza varianti, dalla ripetizione di univocità senza senso, dalla mancanza di discussione critica su questi temi.
Certo, l'aver eliminato dalle aule scolastiche del tutto o quasi le costruzioni geometriche cosiddette "con riga e compasso" non aiuta la comprensione critica, la costruzione di buoni e corretti modelli grafici e mentali degli oggetti della geometria e soprattutto della plurivocità delle loro possibili interpretazioni.

Si rende qui necessaria una nuova nostra precisazione perché c'è ancora il rischio di essere mal interpretati.
Non solo non siamo contrari all'uso in aula dei formidabili software di geometria che hanno invaso tutte le scuole del mondo, a partire dagli anni '80, iniziando con Cabri-Géomètre (la celeberrima creazione dei colleghi Jean-Marie e Colette Laborde); anzi, siamo nettamente a favore. Ma non riteniamo sia un contributo cognitivo positivo il fatto che si possa semplicemente pigiare sul tasto "quadrato" per ottenere bell'e fatto il disegno di un quadrato (il cui lato abbia lunghezza definita) e farlo scorrere sul visore senza scomporlo. Sappiamo che i problemi di scorrimento o trascinamento (dragging) che fanno perdere alle figure costruite dallo studente le loro proprietà fondamentali sono da decenni allo studio di chi, in questo campo, si occupa di didattica della geometria. Costruire passo

passo una figura geometrica e poi vedersela sfaldare per strada in caso di trascinamento è l'inizio di una bella sfida intellettuale che costringe a ripensare criticamente alla definizione di quella figura geometrica. Sarebbe opportuno, per ovviare a questi inconvenienti, che lo studente capisse bene quali sono i legami tra le diverse componenti progettuali e costruttive, per esempio di un quadrato; e questo si vede non utilizzando una macro già precostruita da qualcuno, ma costruendo personalmente un quadrato con riga e compasso per far proprie le relazioni fra le diverse componenti: lato dato, semiretta perpendicolare a quel lato in un vertice del lato che sia anche origine della semiretta, lato su quella perpendicolare congruente al lato precedente e così via.

In quanto alle affrettate conclusioni cognitive relative alla geometria, ci stanno particolarmente a cuore quelle che hanno a che fare con le relazioni fra area e perimetro delle figure in genere, ma dei poligoni in particolare. Perfino parecchi insegnanti hanno risposto a una nostra banale provocazione in maniera errata. Si trattava di questo: in un cruciverba (reale) si doveva scegliere la risposta corretta di 4 lettere alla seguente definizione: «Aumenta quando aumenta il perimetro». Il 100% degli intervistati ha proposto la parola "area" (che era poi quella che aveva in mente il creatore del cruciverba stesso). Il che ci ha lasciato sconcertati, visto che già nel XVI secolo Galileo Galilei si scagliava con parole di fuoco contro conclusioni di questo genere (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2005; Fandiño Pinilla & D'Amore, 2006).[1] Su questo tema abbiamo lavorato a lungo con colleghi ricercatori, docenti di qualsiasi livello scolastico e studenti. Convincere a priori che, data una figura elementare (per esempio un banale quadrilatero), se ne possa aumentare il perimetro e allo stesso tempo diminuire l'area o viceversa, non è stato facile. Solo esempi specifici relativi ben disegnati hanno avuto ragione di questo modo errato di pensare.

Oltre ai veri e propri errori, ci sono situazioni che tali non sono ma che ugualmente servono al nostro scopo di osservare e criticare la relazione dialogica fra docente e allievo.

In una II classe di secondaria di II grado abbiamo proposto il seguente quesito:
«Quali sono le radici dell'equazione di secondo grado: $(x-1)\ (x+3)=0$?».
Si sono avute molte obiezioni al fatto che questa scrittura fosse/rappresentasse davvero un'equazione di II grado a causa del fatto che non appariva una x al quadrato, e che non fosse scritta *bene* (cioè: non in forma canonica). Ma, risolto ciò e accettata la nostra strana denominazione, nessuno studente ha risposto immediatamente «1 e -3», come appare ovvio solo dando un'occhiata all'equazione; tutti hanno eseguito i calcoli che hanno ritenuto necessari per poter giungere all'equazione in forma canonica, moltiplicando cioè fra loro i due binomi, trovando $x^2+2x-3=0$ (si è avuto anche quale banale errore di calcolo); a questo punto hanno applicato la ben nota formula risolutiva conosciuta a memoria da ciascuno degli studenti e dunque finalmente hanno dichiarato che le radici di quella equazione sono 1 e -3.
La maggior parte degli studenti ha trovato e dunque proposto come radici appunto 1 e -3; ma alla nostra osservazione che tali risultati si potevano conoscere senza fare calcoli, solo guardando l'equazione proposta, la totalità ha manifestato una situazione di imbarazzo che possiamo far risalire al contratto didattico: a loro avviso l'insegnante non avrebbe mai accettato quella risposta, data in

---

[1] In realtà l'esempio discusso da Galilei era relativo a una situazione tridimensionale analoga: superficie e volume (invece che perimetro e area). Nella sua straordinaria opera *Discorsi intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, che pubblicò nel 1638, e che tanta polemica produsse negli anni seguenti (Galilei, 1638-1964), nella prima giornata, si trova enunciata la seguente affermazione di Salviati, uno dei tre "Interlocutori" protagonisti del dialogo: «(…) Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito (…)».
Le cose non cambiano molto oggi: tutti gli intervistati asseriscono che se due solidi hanno la stesa superficie allora hanno di certo anche lo stesso volume. Su questa convinzione erronea ha molto lavorato anche Emma Castelnuovo (1993).

questo modo, cioè solo osservando; in matematica *si devono fare dei calcoli*, si devono fare i calcoli nel modo stabilito; quando un insegnante dà un problema, vuole che gli studenti facciano tutti i calcoli, è quello che vuol vedere. Dare la risposta senza eseguire calcoli non sta bene, non è rispettare il contratto.
La nostra domanda, allora, va più a monte e diventa: ma gli studenti avranno capito che cosa vuol dire davvero che un numero è radice di una equazione? Abbiamo l'impressione che la parola "radice" o "soluzione" non abbia senso, se non in riferimento a produrre stimoli per eseguire calcoli nel modo visto. Cioè: la parola "radice" è propedeutica all'esecuzione di un ben determinato calcolo il cui scopo è puramente legato alla valutazione. Bisogna ritrovare quei due numeri che l'insegnante sa già…

Mostriamo ora pochi altri diffusi esempi ben noti di errori che appaiono nelle scuole:

$\sqrt{x^2+y^2} = x + y$

$\frac{x^2+y^2}{x+y} = x + y$

$\frac{a+x}{x} = a$

$\frac{x^2+y^2}{x+y} = x+y$

Molteplici e talvolta pieni di fantasia e inventiva sono gli errori degli studenti sul tema delle frazioni; ci consola il fatto che anche Leonardo aveva poca facilità a operare con esse, come è ampiamente mostrano in vari studi (Bagni & D'Amore, 2006; succ. ediz. 2019)

sen $(\alpha + \beta)$ = sen α + sen β
Si tratta di una sorta di proprietà distributiva… In questo caso, una facile verifica è sufficiente per mostrare che le cose non stanno così: sen 90° ≠ sen 30° + sen 60°.

Eccetera; sappiamo bene che ogni insegnante ha a disposizione centinaia di esempi simili.

Ancora un'esperienza in aula.
Esercizio: «$(x$-1) $(x^3$+3) = … = x^3-x^2+3x-3».
Nuovo esercizio, proposto immediatamente dopo: «Trovare quanto fa (x^3-x^2+3x-3) : (x^3+3)».
Risposta corale: «Facile, bisogna applicare la regola di Ruffini». Tutti gli studenti si impegnano a cercare di ricordare dove e come mettere i coefficienti che appaiono nel dividendo e nel divisore; qualcuno (parecchi) non ricorda (ricordano) esattamente dove vanno messi quei numeri… E se bisogna o no cambiare il segno di alcuni di essi. Sì, alcuni, ma quali? E poi nel polinomio divisore non appaiono né x^2 né x …
Ancora una volta, gli studenti considerano che: se un (adulto in veste di) docente dà da risolvere un esercizio, non è per avere una risposta, lui la sa già, ma per vedere se lo studente sa fare i calcoli opportuni. Si ha addirittura l'impressione che non si sappia che cosa esattamente si stia calcolando. Se il docente dà due polinomi e chiede di fare la loro divisione, non si sa quanti studenti siano coscienti che si sta calcolando un polinomio, il loro quoziente; anzi, per parecchi non importa quel che si sta calcolando, per trovare chi sa cosa… Quel che importa è costruire una certa tabella di numeri, quella che il docente si aspetta, una specie di meccanismo comportamentale. (Brousseau & D'Amore, 2018; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2020).

Torniamo a esempi tratti dalle prove Invalsi.

Anno scolastico 2008 – 2009. Prove nazionali italiane Invalsi di matematica destinate alle classi quinte di Scuola Primaria.

D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo? □ A. Renata. □ B. Fabio. □ C. Maria. □ D. Non si può sapere.

Risultati nazionali in percentuale: mancata risposta: 0,2; A: 42,9; B: 2,2; C: 49,5; D: 5,1.
La risposta attesa (C) è data dal quasi 50% circa di studenti; dunque, un po' più del 50% non sa dare la risposta attesa.
Quale errore di matematica si può riconoscere in queste risposte? In modo ingenuo sembra che, per rispondere correttamente al quesito, basti leggere il testo, capire la situazione descritta, dare la risposta corretta. Non entriamo qui in dettagli: l'analisi di questo risultato è già stata data altrove (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).
Si rivela interessante la spiegazione che danno parecchi docenti intervistati ai quali viene chiesto di spiegare perché, secondo loro, i bambini non hanno dato la risposta attesa - corretta. Tale spiegazione è legata alla differenza fra le prove Invalsi e quelle cui i bambini sono abituati: «Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste e loro non le riconoscono». Nel senso che esistono "situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti" e "situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese". In queste ultime è lecito sbagliare perché non sono le prove usuali, quelle abituali d'aula, quelle attese dagli studenti. Il che la dice lunga su come è costruito il sapere da apprendere in aula: accordi specifici a volte addirittura espliciti. (E non è detto che questo sapere sia quello auspicato dalla Istituzione scolastica o dalla società).

Traiamo ancora spunto dalle prove Invalsi: 2012, test per gli studenti di I secondaria di I grado.

Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande? □ A. 10×0,5 □ B. 10×0,1 □ C. 10:0,5 □ D. 10:0,1

Esaminando oltre 20.000 studenti, ecco le percentuali di risposte ottenute:
A: 71,2%; B: 4,9%; C: 10,0%; D: 10,8%; Non risponde: 2,2%.
Già in D'Amore (1999), oltre una dozzina di anni prima, si spiega che cosa si nasconde dietro questa risposta, chiamando in causa tre diversi aspetti delle ricerche:
(1) la teoria delle immagini e dei modelli nella costruzione della conoscenza matematica,
(2) gli studi sulle attese degli studenti nel risolvere esercizi di aritmetica di Efraim Fischbein,
(3) le considerazioni analitiche di Gérard Vergnaud dei primi anni '80. (Fischbein & Vergnaud, 1992).

Se ancora c'è chi afferma che le teorie di didattica non hanno rilievi e riscontri concreti nella pratica di insegnamento-apprendimento, cominciamo a pensare che si tratta di malafede o di ignoranza …
Una anche banale e iniziale formazione dei futuri docenti in didattica della matematica porterebbe a ragionare su che cosa fare per evitare la scelta massiccia della risposta A:

(1) è necessario non far creare agli studenti un modello (sbagliato) troppo precoce di moltiplicazione, lasciarlo ancora come un'immagine in via di evoluzione che opera in N^2, in attesa di ampliare il dominio numerico da N a Q;
(2) è necessario abbandonare o almeno ripensare criticamente allo stereotipo dello "schieramento" come unico modello figurale intuitivo della moltiplicazione, diffusissimo in Italia, fornendo anche altri modelli intuitivi per raggiungere con il tempo necessario un unico modello formale, ed evitare così il sorgere di modelli parassiti che permangono anche in età adulta;
(3) è necessario ampliare l'insieme delle situazioni che danno senso alle varie accezioni dei termini "moltiplicazione" e "divisione".
Per ottenere risultati apprenditivi positivi o almeno per eliminare il perdurare di concezioni errate alle basi della matematica, è necessario almeno conoscere i significati salienti, i risultati di ricerca delle diverse teorie che oggi conformano la didattica della matematica.
Ma se questi temi non si offrono agli insegnanti (in formazione o in servizio), continueremo ad avere la risposta A, continueremo a interrogarci sui motivi di tali convinzioni da parte degli studenti, continueremo a dare la "colpa" a degli studenti che abbiamo formato noi e che abbiamo obbligato noi a rispondere "A", credendo (e qui esplode l'ironia) di fare il loro bene cognitivo.

Un altro tema di forte discussione analitica è quello della risoluzione dei problemi.
Va detto subito che, nella storia individuale di uno studente, della durata di 13 anni, mai viene davvero affrontata la risoluzione di un problema, sempre si tratta solo di esercizi. La distinzione è relativamente semplice: per risolvere un esercizio bisogna far uso delle conoscenze già possedute dall'allievo, cioè questi dovrà operare nella "zona di sviluppo effettivo", quella delle conoscenze già acquisite; per risolvere un problema bisognerebbe operare nella "zona di sviluppo potenziale", meglio: nella sua "zona prossimale", cioè quella delle conoscenze che sono ancora da apprendere, ma potenzialmente già acquisibili in quanto prossime a quelle della zona effettiva. [Stiamo usando la terminologia tratta dagli studi di Vygotskij (1966)].
Ma la maggioranza, se non la totalità, dei docenti italiani non ritiene corretto proporre agli studenti problemi per risolvere i quali questi debba costruire almeno in parte la teoria necessaria, cioè *apprendere* attraverso questo genere di stimolo; ritengono corretto sempre e solo far lavorare su conoscenze già acquisite. Dunque, in tutta la sua vita scolare, un individuo mai apprende attraverso la risoluzione di un problema, ma solo grazie all'insegnamento esplicito, diretto e specifico del docente. Si tratta di una situazione tipicamente italiana e di altri Paesi scolasticamente analoghi.
E così ci si limita a denominare con la parola "problemi" degli esercizi, suggerendo il più possibile agli studenti che comportamento tenere, in modi talvolta subdoli, la risoluzione, pur di avere uno pseudo successo cognitivo. Per esempio abbiamo visto testi per allievi della primaria nei quali sono proposti, ben distinti fra loro in appositi paragrafi: "problemi di addizione", "problemi di sottrazione" e così via, perfino "problemi impossibili".
Poiché questo tema richiederebbe molto spazio ma è trattato ampiamente in diversi contesti, ci limitiamo a fornire una breve bibliografia (D'Amore, 1993b; 2014; Asenova, D'Amore, Del Zozzo, Fandiño Pinilla, Iori, Marazzani, Monaco, Nicosia, & Santi, 2022), ricordando che non esistono algoritmi per risolvere problemi e che quindi è inutile proporli agli studenti, come invece viene fatto in straordinaria abbondanza e in totale somiglianza in molte aule nostrane.

Testi citati

Asenova, M., D'Amore, B., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Marazzani, I., Monaco, A., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2022). *I problemi di matematica nella scuola primaria tra ricerca didattica e prassi scolastica*. Bologna: Pitagora.

Asenova, M., D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell’oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7-61.

Bagni, G. T., & D’Amore, B. (2006). *Leonardo e la matematica*. Firenze: Giunti. [Riedizione 2019].

Bagni, G. T., & Negrini, P. (2000). Puntini … Considerazioni ed esperienze sul rigore formale nel passaggio tra la Scuole secondaria e l’Università. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, *21*(40), 69-91.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Becerra Galindo, H. M., & Font, V. (2019). Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos. *Revista Acta latinoamericana de matemática educativa [ALME]*, *32*(1), 531-540.

Becerra Galindo, H. M. (2020). Conciencia semiótica de los docentes de matemática en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. *Paradigma*, *XLI* (2), 381-403.

Becerra Galindo, H. M. (2021). Manifestazioni della coscienza semiotica degli insegnanti nell’insegnamento degli insiemi infiniti. In D’Amore, B. (Ed.) (2021). *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete*. *Atti del* Convegno *Incontri con la matematica* n. 35, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021. Pp. 175-176.

Becerra Galindo, H. M. (2022). Nuevos paradigmas en la post - pandemia en Educación matemática. *Memorias del III Simposio de Educación Matemática Virtual – II SEM V*, mayo 2022. Universidad de Luján. [In corso di stampa].

Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, *101*(3-4), 107-131.

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique. Petix x*, 57, 5-30.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. A cura di Bruno D’Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & D’Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54. DOI: 10.24844/EM3003.02.

Castelnuovo, E. (1993). *Pentole, ombre, formiche: in viaggio con la matematica*. Firenze: La Nuova Italia.

Charnay, R. (1989). Les enseignements des mathematiques et les erreurs de leurs eleves. *Grand N*, 45, 31-41.

D’Amore, B. (1987). Matematica e lingua: reciproche influenze. *Riforma della scuola*, 12, 25-32.

D’Amore, B. (1993a). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289-301.

D’Amore, B. (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milano: Angeli.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2000a). Semiotica e noetica nell’apprendimento dei concetti matematici. In B. D’Amore (Ed.) (2000), *Matematica e didattica: tra sperimentazione e ricerca*. Bologna: Pitagora. Pp. 37-48.

D’Amore, B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 28-47.

D’Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557-583.

D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.
D’Amore, B., & Duval, R, (2019). L’educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l’impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell’arte? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47-67.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27-50.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 165-190.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, *21*(1), 87-92. Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006.
D’Amore, B., & Fandiño, Pinilla M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, *33*(64), 33-46.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, *34*(66), 43-52.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Proposte metodologiche illusorie nel processo di insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, *38*(73), 15-42.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla (2020). Sugli scivolamenti metadidattici. Alcuni esempi. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *43A*(2), 108-136.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2021). La ricerca in Didattica della Matematica: una responsabilità dei matematici. *La matematica e la sua didattica*, *29*(1), 39-80.
D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora.
D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.
D’Amore, B. & Santi, G. (2018). Natural language and “mathematics languages”: intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica*, *26*(1), 57-82.
D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 139-163.
Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D’Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students’ errors. En Philippou, G., Christou, C., & Kakas, A. (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education*. Nicosia: Sighroni Epoxi. Pp. 383-400.
Fandiño Pinilla M. I., & D’Amore, B. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.
Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D’Amore. Atti del Convegno *Incontri con la matematica*, n. 6: *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Castel san Pietro Terme, 13-15 XI 1992, Bologna: Pitagora.
Gagatsis, A., & Christou, C. (1997). Errors in mathematics: A multidimensional approach. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *34*(1) 89–116.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24-58.

Galilei, G. (1638-2021). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*. Leida (Nederland): Elzeviri. [2021: Torino: Codice].

Gallo, E. (1992a), Elaboration of models for problem resolution in interaction with 14-15-year-old pupils. In L. Bazzini & H.-G. Steiner (Eds.) (1992), *Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*. Osnabrueck: Università di Osnabrueck. Pp. 289-301

Gallo, E. (1992b), Le contrôle dans la résolution de problèmes: une situation de classe. Proceedings CIEAEM 44, Chicago.

Gallo, E. & Testa, C. (1991), Modèles, stratégies, types de contrôle dans la résolution d'un problème graphique de géometrie. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 8, 55-78.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseigement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121-135.

Ramírez Bernal, H. A. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico.* (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá.

Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 203-216.

Ramírez Bernal, H. A. (2020). Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 87-105.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente. Pp. 69-108.

Vygotskij, L. S. (1966), *Pensiero e Linguaggio*. Firenze: Giunti e Barbèra. [La I ed., Cambridge, MIT Press, 1962, è un riassunto tratto dalla ed. originale in lingua russa, raccolta di articoli pubblicati a Mosca nel 1956. L'ed. it. è condotta su quella in lingua inglese, tranne il cap. 7 che è traduzione integrale].